

Zusammenfassung: Taylor-Entwicklung

gegeben:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Funktion } \in \mathbb{C}: f(x) := \ln(1+x), x > -1; \\ \text{und} \\ \text{Entwicklungsmittel } a := 0; f \text{ reellwertig} \end{array} \right.$$

Taylor-Reihe in a:

$$\begin{aligned} T_a f(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} x^k \end{aligned}$$

Konvergent für $x \in (-1, 1]$ ($\leadsto$ Area I)

"Restglied": $\exists c$ zwischen x und a mit

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) (x-a)^{n+1}$$

Darstellung von Lagrange

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+c} \right)^{n+1}$$

(*)

- 60^b

Frage:

Für welche x ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0?$$

D.h.: Wo gilt $f(x) = T_0 f(x)$?

Fall 1: $x > 0$ (und $x \leq 1$, da sonst $T_0 f(x)$ divergiert)

$$\Rightarrow \frac{x}{1+c} \leq \frac{1}{1+c} < 1$$

(*) liefert $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

auf $[0, 1]$ $\Rightarrow \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Fall 2 : $x < 0$

-61-

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{|x|}{|1+c|} \right)^{n+1}$$

mit $c \in (x, 0)$. Es gilt

$$|R_n(x)| \rightarrow 0, \quad \text{falls}$$

$$\boxed{\frac{|x|}{|1+c|} \leq 1} \quad (**)$$

Man hat :

$$\frac{|x|}{|1+c|} = \frac{|x|}{1-|c|} \leq \frac{|x|}{1-|x|}$$

$$\text{und} \quad \frac{|x|}{1-|x|} \leq 1 \iff |x| \leq \frac{1}{2}$$

Sicherlich

Ergebnis :

$$R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

für

$$\boxed{-\frac{1}{2} \leq x \leq 0}$$

Frage :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} x^k$$

auch für

$$x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right]$$

?

Keine Antwort möglich mit Lagrange! ∇ $\rightarrow$ -62-

andere Restgliedformeln: $\left(\begin{array}{l} \text{für } f: I \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{von der Klasse } C^\infty \end{array} \right)$



Seien a und x fixiert, o. E. $a < x$

Erinnerung: zur Herleitung von Lagrange
haben wir in § 11 folgende Funktion
studiert (Beweis von Satz 11.15)

$$\left\{ \begin{array}{l} g(y) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(y) \cdot (x-y)^k, \\ y \in [a, x], \end{array} \right.$$

und gezeigt (Skript I, p. 182)

$$\left\{ \begin{array}{ll} g(a) = R_n(x) & (\text{klar!}) \\ g(x) = 0 & (- \parallel -) \\ g'(y) = - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} (x-y)^n & (\text{Rechnung}) \end{array} \right.$$

Sei $h : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig,

aber mit folgenden Eigenschaften:

- h differenzierbar und streng monoton
- $h' \neq 0$ überall

2^{ter} MWS

$\Rightarrow$

$$\frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g'(z)}{h'(z)}$$

mit $z \in (a, x)$

$\Downarrow$ Einsetzen in $g(x) - g(a) = -R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \varphi^{(n+1)}(z) \frac{h(x) - h(a)}{h'(z)} (x - z)^n$$

für eine Zwischenstelle z zwischen a und x

Spezialisierung : $h(y) = (x - y)^m$, $m \gg 1$

$$\Rightarrow h'(y) = -m (x - y)^{m-1}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{-(x-a)^m}{-m \cdot (x-\xi)^{m-1}} \cdot (x-\xi)^n$$

// Schlömilch //

$$= \frac{1}{m} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1-m}}{(x-a)^{n+1-m}} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Spezialfälle:

1.) $m := n+1 \rightsquigarrow$ Lagrange

2.) $m := 1 \rightsquigarrow$

Restglied von Cauchy:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot \left(\frac{x-\xi}{x-a} \right)^n \cdot (x-a)^{n+1}$$

$\ln(1+x)$ auf $(-1, 0)$ mit Cauchy:

$$R_n(x) = (-1)^n \underbrace{\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}}_{= f^{(n+1)}(\xi)} \cdot \frac{1}{n!} \left(\frac{x-\xi}{x} \right)^n \cdot x^{n+1}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{1+\eta} \cdot x^{n+1} \left\{ \frac{1}{1+\eta} \cdot \frac{x-\eta}{x} \right\}^n$$

es ist $\frac{1}{1+\eta} \cdot \frac{x-\eta}{x} > 0$

und



$$\boxed{\frac{1}{1+\eta} \cdot \frac{x-\eta}{x} < 1}$$



$$\frac{x-\eta}{x} < 1+\eta \Leftrightarrow x-\eta > x \cdot (1+\eta)$$

$$\Leftrightarrow -\eta > x \cdot \eta \Leftrightarrow \underbrace{\eta < 0}_{\text{o.k.}} \quad \underbrace{-1 < x}_{\text{o.k.}}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{1}{1+\eta} |x|^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ da}$$

$$\frac{1}{1+\eta} \leq \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad |x| < 1$$

Satz :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k-1} x^k$$

für $-1 < x \leq 1$.

~~(weiter auf S. 42)~~ (Gibt auch VIEL einfacher!)

bisherige Restgliedformeln (Lagrange, Cauchy, Schlömilch) =

punktweise definierte Terme, wo eine unbestimmte „Zwischenstelle“ eingeht;

neue Darstellung von $R_n(x)$ als Integral:

- die Zwischenstelle wird „ausgemittelt“
- überraschende Folgerungen (Satz 15.1/2)

Sei $f \in C^\infty(I)$, $a \in I \implies$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt,$$

$x \in I, n \in \mathbb{N}_0$

Integraldarstellung

Beweis: induktiv

$$n=0: \quad R_0 f(x) := f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt;$$

$$n=1: \quad R_1 f(x) := f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

$$= \int_a^x f'(t) dt + \int_a^x \frac{d}{dt} \{ (x-t) f'(t) \} dt$$

$$= \int_a^x f'(t) dt + \int_a^x \left(-f'(t) + (x-t) f''(t) \right) dt$$

$$= \int_a^x (x-t) f''(t) dt, \text{ usw.} \quad \square$$

Wir vergeben einen Namen für Funktionen

$f \in C^\infty(I)$, die lokal auf I durch

ihre Taylor - Reihen dargestellt werden.

Def 15.1 : Sei I ein offenes Intervall

und $f: I \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt

reell analytisch auf I ($f \in C^\infty(I)$)

: $\Leftrightarrow$ zu jedem $x_0 \in I$ gibt es ein $\varepsilon > 0$
und eine auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ konvergente

Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Bem: 1.) Satz 7.14 $\Rightarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergiert glm.

auf $[x_0 - \tilde{\varepsilon}, x_0 + \tilde{\varepsilon}] \quad \forall 0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$

2.) Schrittweise Anwendung von Satz 13.3

$$\Rightarrow f \in C^\infty(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \text{ also:}$$

$$f \in C^\infty(I) \Rightarrow f \in C^\infty(I)$$

(Umkehrung bekanntermaßen falsch!)

$$\text{außerdem: } f^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (*)$$

3.) Kombiniere $(*)$ mit dem Identitätssatz für Potenzreihen fkten:

$$f \in C^\infty(I) \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Zu jedem } x_0 \in I \text{ existiert} \\ \text{ein } \varepsilon > 0, \text{ so dass } f \text{ auf} \\ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \text{ durch die} \\ \text{Taylor-Reihe in } x_0 \text{ dargestellt} \\ \text{wird} \end{array} \right.$$

Um zu entscheiden, ob für
eine Funktion $\varphi \in C^\infty(I)$ auch

$$\varphi \in C^\omega(I)$$

richtig ist, wünscht man sich einfach
zu prüfende Kriterien. Hier hilft u.a.
die Integraldarstellung des Restglieds.

Satz 15.1 : (von Bernstein)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

$\varphi \in C^\infty(I)$ erfülle $\varphi^{(n)}(x) \gg 0$

für alle $x \in I$ und für genügend
große n . Dann ist $\varphi \in C^\omega(I)$.

(Bei $x \mapsto \ln(1+x)$ greift die Voraussetzung nicht)

Zur Vorbereitung dient

Satz 15.2 : Sei $f \in C^\infty([-1,1])$

eine gerade Funktion, d.h. per Def.

$f(-x) = f(x)$. Es gelte für n

groß genug $f^{(2n)}(x) \geq 0$ für alle

$|x| \leq 1$. Dann ist

$$f(x) = T_0 f(x), \quad |x| < 1$$

O.E. alle ^{geraden} Ableitungen ≥ 0 , sonst vgl.

Beweis: $\checkmark$ Es gilt: Courant, Diff. u. Integralrechnung Bd 1, p. 284

f gerade $\implies f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0$

denn : $\underbrace{\frac{1}{-h} (f(-h) - f(0))}_{\longrightarrow f'(0) \text{ bei } h \rightarrow 0} =$

$$\frac{1}{-h} (f(h) - f(0)) = \underbrace{-\frac{1}{h} (f(h) - f(0))}_{\rightarrow -f'(0), h \rightarrow 0}$$

Also: $f'(0) = 0$ (weiter mit Induktion)

Schreibe für $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) x^{2k} + \underline{\underline{R_{2n}(x)}}$$

$$= \underline{\underline{T_{2n,0} f(x)}}$$

und benutze

$$(*) \quad R_{2n}(x) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^x (x-t)^{2n} f^{(2n+1)}(t) dt$$

Fall $x > 0$:

Die Variable $t \in [0, x]$ hat die Form

$$t = \rho x \text{ mit } 0 \leq \rho \leq 1.$$

beachte: $f^{(2n+2)} \geq 0$

$\Rightarrow \varphi^{(2n+1)}$ wächst, also:

-73-

$$\varphi^{(2n+1)}(t) \leq \varphi^{(2n+1)}(\rho) \text{ wegen } 0 < x \leq 1$$

Also: $\boxed{R_{2n}(x)} = \left(\text{Variablentransf. in } \textcircled{t = \rho x} \right)$

$$\int_0^1 \frac{1}{(2n)!} x \cdot (x - \rho x)^{2n} \varphi^{(2n+1)}(\rho x) d\rho$$

$$\stackrel{\text{p.o.}}{\leq} \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 x (x - \rho x)^{2n} \varphi^{(2n+1)}(\rho) d\rho$$

$$= \frac{1}{(2n)!} x^{2n+1} \int_0^1 (1 - \rho)^{2n} \varphi^{(2n+1)}(\rho) d\rho$$

$$= x^{2n+1} \cdot R_{2n}(1) \quad \Rightarrow$$

$$(1) \quad R_{2n}(x) \leq x^{2n+1} R_{2n}(1)$$

Nun beachte

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} (1-0)^{2k}}_{\geq 0} + R_{2n}(1)$$

Taylor-Polynom der Ordnung $2n$ ausgewertet in 1

$$\Rightarrow (2) \quad R_{2n}(1) \leq f(1)$$

(1) und (2) zusammen ergeben

$$(3) \quad R_{2n}(x) \leq f(1) \cdot x^{2n+1}$$

Wegen $R_{2n}(x) \geq 0$ ergibt (3): $f^{(2n+1)}(0) = 0$ und f wachsend

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n}(x) = 0, \quad 0 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{2n,0} f(x), \quad 0 \leq x < 1.$$

Fall $x < 0$: analog Konvergenz auf $-1 < x < 0$

□

Korollar 1 : Sei $f \in C^\infty([-1, 1])$

ungerade $(\Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0)$
mit $f^{(2n+1)}(x) \gg 0$ auf $[-1, 1]$.

Dann ist

$$f(x) = T_0 f(x), \quad |x| < 1.$$

Beweis : $g := f'$ ist gerade; benutze
15.2 für g und integriere „hoch“. □